Tutorato 9 GE220

DOCENTE: MASSIMILIANO PONTECORVO. ESERCITATORE: RAFFAELE CARBONE.
TUTORI: GIOVANNI PASSERI. BRUNO RENZI.
GIOVEDÌ 10 MAGGIO 2018.

Esercizio 1. *Consideriamo* $f, g : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f : t \mapsto e^{2\pi it}$, $g : t \mapsto 1$ *e* $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $H : (s,t) \mapsto e^{2\pi ist}$. *Mostrare che* H *costituisce un'omotopia di applicazioni fra* f *e* g*, ma non è un'omotopia di cappi.*

Esercizio 2. *Mostrare che:*

1. $\{p\} \subset X$ *è retratto di* X*, per ogni* $p \in X$
2. $\{p\} \subset X$ *è retratto per deformazione di* $X \iff X$ *è contraibile*
3. *Se* $r : A \to X$ *è una retrazione, allora l'omomorfismo di gruppi indotto dall'inclusione* $i : A \hookrightarrow X$, $i_* : \pi_1(A) \to \pi_1(X)$ *è iniettivo.*
4. *Se* X *e* Y *sono omeomorfi allora sono omotopicamente equivalenti. Non vale il viceversa (fornire un controesempio).*

Nei seguenti esercizi, è da supporre noto il fatto che $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

Esercizio 3. *Determinare il gruppo fondamentale del cilindro* $\mathbb{R} \times S^1$ *e del toro bidimensionale* $S^1 \times S^1$.

Esercizio 4. *Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:*

1. S^1 *è retratto di* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
2. S^1 *è retratto di deformazione di* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
3. *Se* $p \in S^1$, $\{p\}$ *è retratto di* S^1.
4. S^1 *è retratto di* $\mathbb{R}^2$.
5. $\epsilon := \{(\cos t, \sin t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ *è retratto di deformazione di* $\mathcal{E} := \{(s\cos t, s\sin t, t) : s \in (0, +\infty), t \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 5. *Consideriamo* $M_n(\mathbb{R})$ *l'insieme delle matrici quadrate a valori reali di dimensione* n*, dotato della topologia euclidea.*

1. *Mostrare che* $GL_n(\mathbb{R})$ *è un aperto di* $M_n(\mathbb{R})$.
2. *Mostrare che* $O(n)$ *è un chiuso di* $M_n(\mathbb{R})$.
3. *Mostrare che* $GL_n(\mathbb{R})$ *e* $O(n)$ *sono sconnessi.*

Esercizio 6. * *Sia* $x_0 \in B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ *e sia* $D^2 := \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^2$. *Consideriamo l'applicazione* $g : D^2 \setminus \{x_0\} \to S^1$ *definita come segue: per ogni* $x \in D^2 \setminus \{x_0\}$ *si consideri la retta* R *passante in* x *e* x_0 *e si consideri la corda* PQ *tagliata da* R *su* S^1*; la corda* PQ *è tagliata in due sottosegmenti dal punto* x_0*, uno dei quali contiene anche il punto* x*. Si definisca* $g(x)$ *come l'estremo su* S^1 *del sottosegmento contente* x*.*

1. *Mostrare che* g *è continua.*

2. *Mostrare che* g *è suriettiva.*

3. *Usando i punti precedenti, mostrare che se* $f : D^2 \to D^2$ *è un'applicazione continua allora* f *deve avere un punto fisso (i.e.: deve esistere* $x \in D^2$ *tale che* $f(x) = x$*) (Teorema di Brower)*

   Suggerimento: Ricordarsi che se X *è uno spazio topologico e* $A \subseteq X$ *è un suo retratto (*A, X *arcoconnessi), allora* $\pi_1(A) \leq \pi_1(X)$*.*